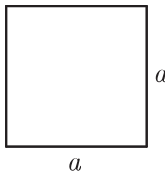
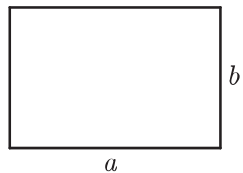
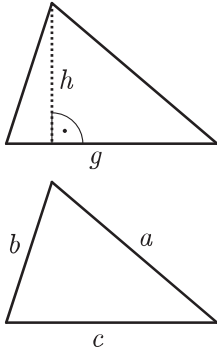
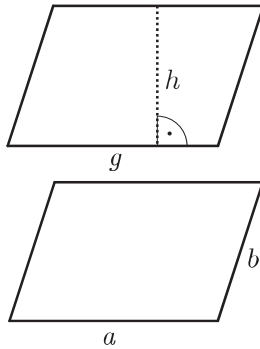
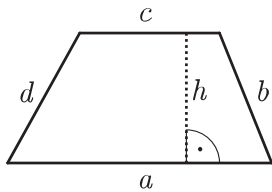
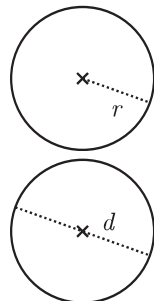
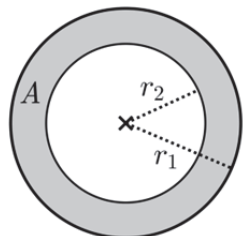
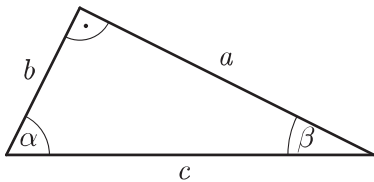
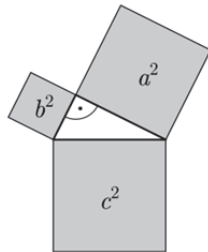


Formelsammlung Mathematik – Zentrale Prüfungen 10

Anforderungsniveau MSA

Ebene Figuren			
Quadrat Flächeninhalt: $A = a \cdot a = a^2$ Umfang: $u = 4 \cdot a$			
Rechteck Flächeninhalt: $A = a \cdot b$ Umfang: $u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$			
Dreieck Flächeninhalt: $A = \frac{g \cdot h}{2}$ Umfang: $u = a + b + c$			
Parallelogramm Flächeninhalt: $A = g \cdot h$ Umfang: $u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$			
Trapez Flächeninhalt: $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$ Umfang: $u = a + b + c + d$			
Kreis Radius: r Durchmesser: $d = 2 \cdot r$ Flächeninhalt: $A = \pi \cdot r^2$ Umfang: $u = 2 \cdot \pi \cdot r$			
Kreisring Flächeninhalt: $A = A_1 - A_2$ $= \pi \cdot r_1^2 - \pi \cdot r_2^2$			
Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck			
In einem <i>rechtwinkligen</i> Dreieck gilt:  Die beiden <i>Katheten</i> a und b bilden einen rechten Winkel. Die <i>Hypotenuse</i> c ist die längste Seite des Dreiecks und liegt dem rechten Winkel gegenüber.		Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ 	
		Trigonometrie $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$ $\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$ $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$	
Maßeinheiten			
Länge Kilometer Meter Dezimeter Zenti-meter Milli-meter 1 km = 1000 m 1 m = 10 dm 1 dm = 10 cm 1 cm = 10 mm		Fläche Quadrat-meter Quadrat-dezimeter Quadrat-zentimeter Quadrat-millimeter 1 m ² = 100 dm ² 1 dm ² = 100 cm ² 1 cm ² = 100 mm ²	

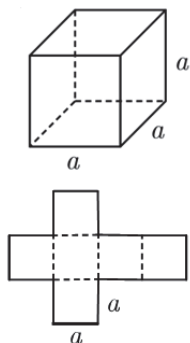
Geometrische Körper**Würfel**

Volumen:

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$

Oberfläche:

$$O = 6 \cdot a \cdot a = 6 \cdot a^2$$

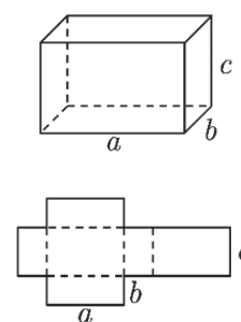
**Quader**

Volumen:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Oberfläche:

$$O = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot c \cdot a$$

**Prisma***Beispiel: Dreiecksprisma*

Grundfläche:

 G

Höhe des Körpers:

 h_K Umfang der
Grundfläche: u

Volumen:

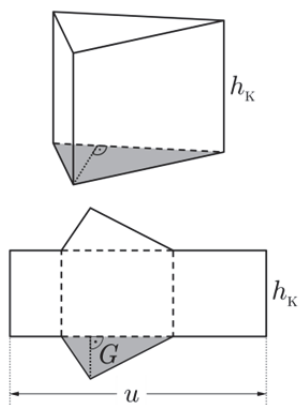
$$V = G \cdot h_K$$

Mantelfläche:

$$M = u \cdot h_K$$

Oberfläche:

$$O = 2 \cdot G + M$$

**Zylinder**Grundfläche (Kreis): $G = \pi \cdot r^2$

Höhe des Körpers:

 h_K Umfang der
Grundfläche:

$$u = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Volumen:

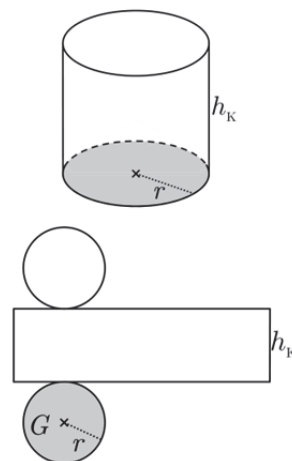
$$V = G \cdot h_K$$

Mantelfläche:

$$M = u \cdot h_K$$

Oberfläche:

$$O = 2 \cdot G + M$$

**Pyramide***Beispiel:**Quadratische Pyramide*

Grundfläche:

 G

Höhe des Körpers:

 h_K

Höhe der Seitenfläche:

 s

Volumen:

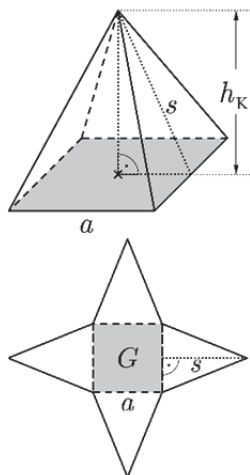
$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_K$$

Mantelfläche:

 M

Oberfläche:

$$O = G + M$$

**Kegel**Grundfläche (Kreis): $G = \pi \cdot r^2$

Höhe des Körpers:

 h_K

Länge der Mantellinie:

 s

Volumen:

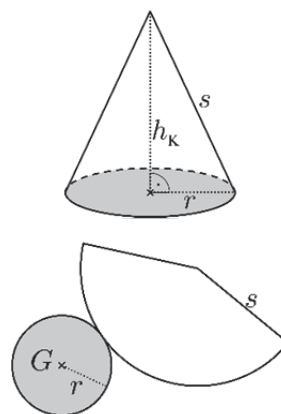
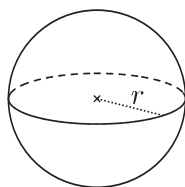
$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_K$$

Mantelfläche:

$$M = \pi \cdot r \cdot s$$

Oberfläche:

$$O = G + M$$

**Kugel**Volumen: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ Oberfläche: $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ **Maßeinheiten****Volumen**

Kubikmeter	Kubik-dezimeter	Kubik-zentimeter	Kubik-millimeter
1 m ³	= 1 000 dm ³		
	1 dm ³	= 1 000 cm ³	
		1 cm ³	= 1 000 mm ³
Liter (ℓ)	1 dm ³ = 1 ℓ	= 1 000 mℓ	
		1 cm ³	= 1 mℓ

Masse

Tonne	Kilogramm	Gramm	Milligramm
1 t	= 1 000 kg		
	1 kg	= 1 000 g	
		1 g	= 1 000 mg

Zentrische Streckung und Ähnlichkeitsbeziehungen

Bei einer zentrischen Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckfaktor k ($k \neq 0$) wird jeder Punkt P auf einen Bildpunkt P' abgebildet. Es gilt:

- Z, P und P' liegen auf einer Geraden.
- $\overline{ZP'} = |k| \cdot \overline{ZP}$
- $k > 0$: P' und P liegen auf derselben Seite von Z
- $k < 0$: P' und P liegen auf gegenüberliegenden Seiten von Z

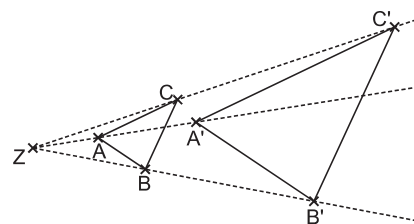
Beispiel: zentrische Streckung eines Dreiecks

$$k > 0$$

$$k = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} = \dots$$

außerdem gilt:

$$k = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \dots$$



Original- und Bildfigur sind zueinander ähnlich, d.h. die Bildstrecken sind parallel zu den Originalstrecken und die Winkelgrößen bleiben erhalten.

Prozent- und Zinsrechnung

Prozentrechnung

Grundwert: $G \triangleq 100\%$

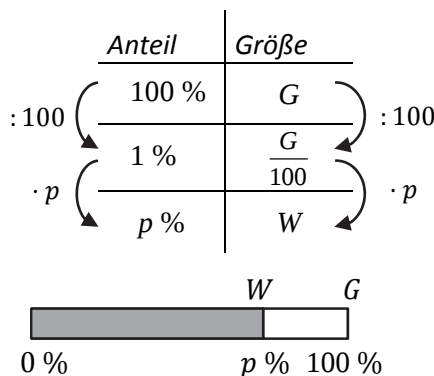
$$G = \frac{W}{p\%}$$

Prozentsatz: $p\% = \frac{p}{100}$

$$p\% = \frac{W}{G}$$

Prozentwert: W

$$W = G \cdot p\%$$



Prozentsätze zur Orientierung

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$5\% = \frac{1}{20} = 0,05$$

$$10\% = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$25\% = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$33,3\% = \frac{1}{3} = 0,\bar{3}$$

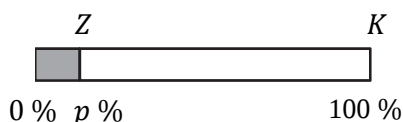
$$50\% = \frac{1}{2} = 0,5$$

Zinsrechnung

Kapital: $K \triangleq 100\%$

Zinssatz: $p\%$

Zinsen: Z



Jahreszinsen

$$Z = K \cdot p\%$$

Monatszinsen

m: Anzahl der Monate

$$Z_m = K \cdot p\% \cdot \frac{m}{12}$$

Tageszinsen

t: Anzahl der Tage

$$Z_t = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$$

Zinseszins

Anfangskapital: K_0

Kapital mit Zinseszins Jahr für Jahr

Zinsfaktor: $q = 1 + \frac{p}{100}$

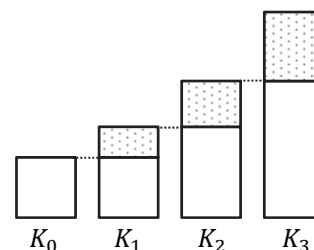
$$1. \text{ Jahr: } K_1 = K_0 \cdot q$$

$$2. \text{ Jahr: } K_2 = K_1 \cdot q$$

$\vdots$

Kapital mit Zinseszins nach n Jahren

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$



Diagramme

Werte darstellen

Säulendiagramm

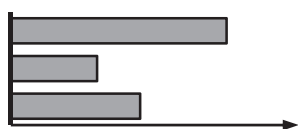


Anteile darstellen

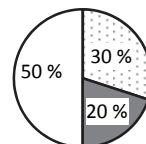
Streifendiagramm



Balkendiagramm



Kreisdiagramm



$$100\% \triangleq 360^\circ$$

$$10\% \triangleq 36^\circ$$

$$1\% \triangleq 3,6^\circ$$

Daten

Häufigkeiten

absolute Häufigkeit

Die absolute Häufigkeit gibt an, wie oft ein bestimmter Wert (*Merkmal/Ergebnis/Ereignis*) bei einer Befragung/einem Experiment auftritt.

relative Häufigkeit

Die relative Häufigkeit gibt das *Verhältnis* von der absoluten Häufigkeit eines Wertes zu der Anzahl aller Werte an.

$$\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Anzahl aller Werte}}$$

Daten sammeln und ordnen

Urliste

In einer Urliste liegen alle Werte einer Befragung in der Reihenfolge vor, wie sie beobachtet wurden.

Rangliste

In einer Rangliste liegen alle Werte einer Befragung in geordneter Reihenfolge vor, vom kleinsten zum größten Wert sortiert.

Mittelwerte

arithmetisches Mittel $\bar{x}$

Das arithmetische Mittel (*Durchschnittswert*) ist die Summe aller Werte geteilt durch die Anzahl n der Werte.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Median $\tilde{x}$

Der Wert, der in der Mitte einer Rangliste steht, heißt Median (*Zentralwert*).

Median bei ungerader Anzahl :

38 ; 39 ; 39 ; 40 ; 43
Median

$$\tilde{x} = 39$$

Median bei gerader Anzahl :

38 ; 39 ; 40 ; 45
Median

$$\tilde{x} = 39 \text{ oder } \tilde{x} = 40$$

bzw.:

$$(39 + 40) : 2 = 39,5$$

Statistische Kennwerte im Boxplot darstellen

Minimum: x_{Min}

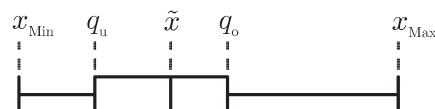
Maximum: x_{Max}

Spannweite: $x_{\text{Max}} - x_{\text{Min}}$

Median: $\tilde{x}$

unteres Quartil: q_u (Median der unteren Hälfte der Werte)

oberes Quartil: q_o (Median der oberen Hälfte der Werte)



Wahrscheinlichkeitsrechnung

Laplace-Wahrscheinlichkeit

Laplace-Versuche sind Zufallsversuche, bei denen jedes Ergebnis gleich wahrscheinlich ist.

Für die Wahrscheinlichkeit P eines Ereignisses E gilt dann:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

Mehrstufige Zufallsversuche

Mehrstufige Zufallsversuche lassen sich in einem Baumdiagramm darstellen. Die Wahrscheinlichkeiten lassen sich mit Hilfe der Pfadregeln berechnen.

1. Pfadregel (Produktregel)

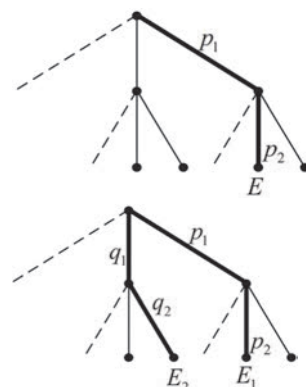
Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses E ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des zugehörigen Pfades.

$$P(E) = p_1 \cdot p_2$$

2. Pfadregel (Summenregel)

Die Wahrscheinlichkeit eines zusammengesetzten Ereignisses E ist gleich der Summe der einzelnen Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Ergebnisse.

$$P(E) = P(E_1) + P(E_2) = p_1 \cdot p_2 + q_1 \cdot q_2$$



Funktionen

Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung. Dabei wird jeder Ausgangsgröße genau eine Größe zugeordnet.
Eine Funktion kann auf unterschiedliche Weise angegeben werden:

Wortform

Beispiel:

„Jeder Zahl wird ihre
Quadratzahl zugeordnet.“

Zuordnungsvorschrift

$$x \mapsto x^2$$

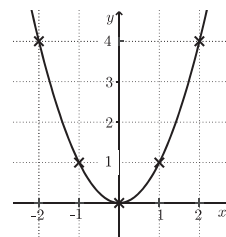
Wertetabelle

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Funktionsgleichung

$$y = x^2 \quad \text{oder} \quad f(x) = x^2$$

Graph



Schnittpunkte und Berührungspunkte mit den Koordinatenachsen:

Wenn $f(x_0) = 0$, dann ist x_0 eine Nullstelle von f . Der Graph von f schneidet oder berührt die x -Achse im Punkt $(x_0 | 0)$.

Wenn der Graph einer Funktion f die y -Achse schneidet, dann ist an der Stelle $x = 0$ der Schnittpunkt mit den Koordinaten $(0 | y_0)$.

Lineare Funktionen

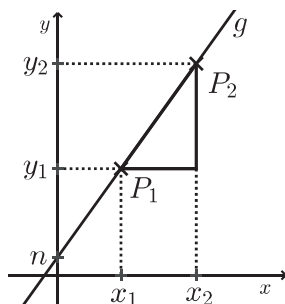
allgemeine Geradengleichung

$$g: y = m \cdot x + n$$

Steigung der Geraden

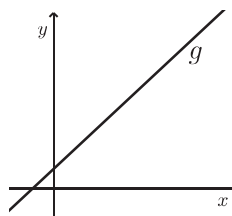
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad x_2 \neq x_1$$

y -Achsen-Abschnitt: n



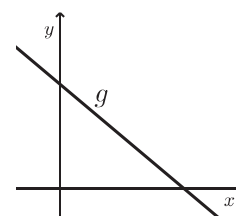
$m > 0$

die Gerade g steigt



$m < 0$

die Gerade g fällt

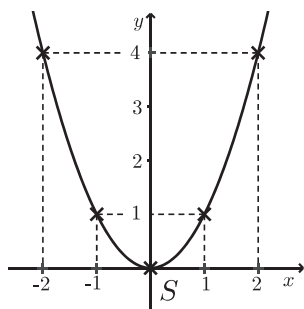


Eigenschaften von quadratischen Funktionen

Normalparabel

$$y = x^2$$

Scheitelpunkt: $S(0|0)$

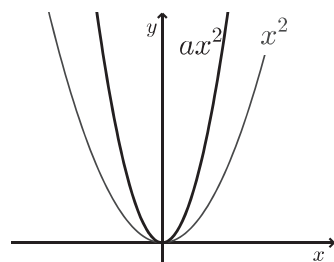


gestreckte / gestauchte Parabel:

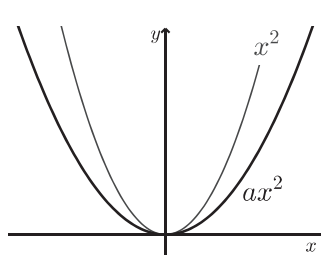
$$y = a \cdot x^2$$

Streckfaktor: a , $a \neq 0$

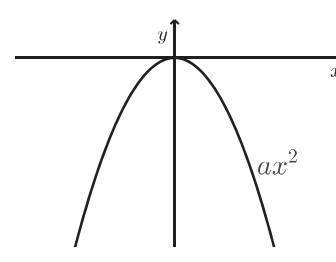
Die Parabel ist
gestreckt, wenn
 $a > 1$



Die Parabel ist
gestaucht, wenn
 $0 < a < 1$



Die Parabel ist *nach unten geöffnet*, wenn
 $a < 0$



allgemeine Form

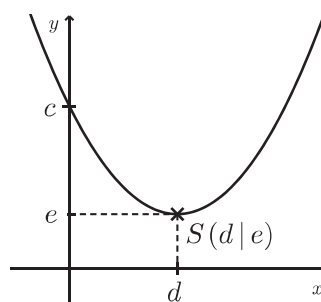
$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, \quad (a \neq 0)$$

Schnittpunkt mit der y -Achse: $(0|c)$

Scheitelpunktform

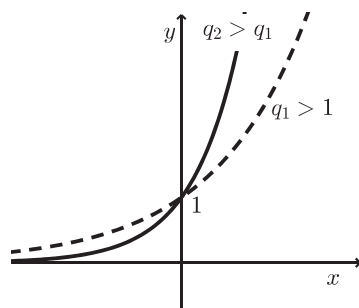
$$y = a \cdot (x - d)^2 + e, \quad (a \neq 0)$$

Scheitelpunkt: $S(d|e)$



Exponentialfunktionen und exponentielles Wachstum*allgemeine Form*

$$y = q^x \quad (q \in \mathbb{R}^+)$$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$ Wertebereich: $y \in \mathbb{R}^+$ Schnittpunkt mit der y -Achse: $(0|1)$ Kein Schnittpunkt mit der x -Achse*exponentielles Wachstum*

$$y = a \cdot q^x \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, q \in \mathbb{R}^+)$$

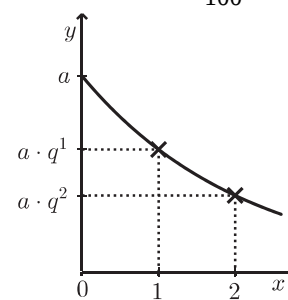
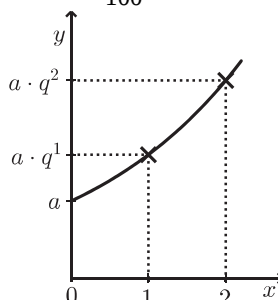
Anfangswert (Startwert): a Wachstumsfaktor: q

		$\xrightarrow{+1}$	$\xrightarrow{+1}$	
x	0	1	2	...
y	a	$a \cdot q$	$a \cdot q^2$	...
		$\cdot q$	$\cdot q$	

*prozentuale Zunahme um $p\%$:**prozentuale Abnahme um $p\%$:*

$$q > 1, \quad q = 1 + \frac{p}{100}$$

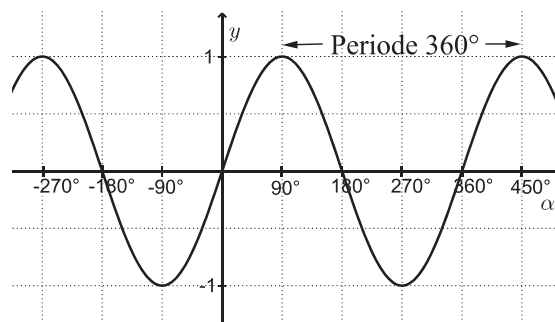
$$0 < q < 1, \quad q = 1 - \frac{p}{100}$$

**Sinusfunktion**

$$y = \sin \alpha$$

Wertebereich: $-1 \leq y \leq 1$ Periode: 360° , also

$$\sin \alpha = \sin(\alpha + 360^\circ)$$

**Binomische Formeln**

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Quadratische Gleichungen*Normalform:*

$$x^2 + p \cdot x + q = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

$$\text{Lösung: } x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \text{ wenn } \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$$

$$\text{Es gibt keine Lösung, wenn } \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0.$$

Potenz- und Wurzelgesetze**Potenzgesetze** $m, n \in \mathbb{Q}$, wenn $a, b \in \mathbb{R}^+$ oder $m, n \in \mathbb{Z}$, wenn $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Wurzelgesetze $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ und $m, n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b > 0)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$